АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ КООПЕРАЦИИ, ЭКОНОМИКИ И ПРАВА»

ПРОГРАММА

вступительных испытаний при приеме на обучение
по программам подготовки научно-педагогических
кадров в аспирантуре по профилю «Вещественный,
комплексный и функциональный анализ»
направления подготовки научно-педагогических
кадров 01.06.01 «Математика и механика»

Издательство
Белгородского университета
кооперации, экономики и права

2014

ББК Рекомендована к изданию кафедрой
П естественнонаучных дисциплин
Протокол № 5 от 24 января 2014 года

Составитель:
Носков Антон Валерьевич, доктор физико - математических наук, доцент

Программавступительных испытаний при приеме на обучение по программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по профилю «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» направления подготовки научно-педагогических кадров 01.06.01 «Математика и механика»

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основная задача аспирантуры – подготовка научных и научно-педагогических кадров высшей квалификации математического профиля. Целями подготовки аспиранта являются:

- формирование навыков самостоятельной научно-исследовательской и педагогической деятельности;
- углубленное изучение теоретических и методологических основ математических наук;
- совершенствование знаний иностранного языка, в том числе для использования в профессиональной деятельности.

Данная программа предназначена для сдачи вступительного экзамена по специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ». Она включает три раздела: «Теория функций действительного переменного», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ».

Прием экзамена по специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» проводится по экзаменационным билетам, составленным на основании данной программы.

Темы рефератов определятся соискателями и утверждаются на кафедре.

Предполагается, что экзаменующийся владеет общим курсом математического анализа в объеме университетской программы.

РАЗДЕЛ 1. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Тема 1.1. Мера, измеримые функции, интеграл

Аддитивность и счетная аддитивность меры. Лебегово продолжение меры. Измеримые функции. Сходимость по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение с интегралом Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

Тема 1.2. Неопределенный интеграл Лебега. Теория дифференцирования

Производная неопределенного интеграла Лебега. Восстановление функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона-Никодима. Интеграл Стилтьеса.

Тема 1.3. Пространства суммируемых функций

Пространства L_p. Ортогональные системы функций в L_2. Ряды по ортогональным системам.

Тема 1.4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье

Условия сходимости ряда Фурье. преобразование Фурье в пространствах L_1 и L_2. преобразование Лапласа. Преобразование Фурье-Стилтьеса.

Тема 1.5. Дифференцируемые многообразия и дифференциальные формы

Дифференцируемые многообразия. Дифференциальные формы Стокса.

РАЗДЕЛ 2. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Тема 2.1. Интегральные представления аналитических функций

Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл Коши. Формулы Соходского.

Тема 2.2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Разложение аналитических функций в ряды Тейлора, Лорана, неравенство Коши. Нули аналитических функций. Теорема двойственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Вычеты, теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Теорема Рунге о продолжении аналитических функций многочленами.

Тема 2.3. Целые и мероморфные функции

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение конечной функции в конечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Ниттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

Тема 2.4. Конформные отображения

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

Тема 2.5. Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие римановой поверхности. Продолжение

вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления конечного и бесконечного порядка. Принцип симметрии. Модулярная функция. Нормальные семейства, критерий нормальности. Теорема Пикара.

РАЗДЕЛ 3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Тема 3.1. Метрические и топологические пространства

Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических и топологических пространствах.

Тема 3.2. Нормированные и топологические линейные пространства

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана-Банаха. Нормированные пространства. Топологические линейные пространства.

Тема 3.3. Линейные функционалы и линейные операторы

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов. Компактные (вполне непрерывные) операторы.

Тема 3.4. Гильбертовы пространства. Спектральная теория самосопряженных операторов

Теория ограниченных операторов. Пространства l_2 и L_2. Неограниченные операторы.

Тема 3.5. Обобщенные функции

Основные и обобщенные функции. Дифференцирование обобщенных функций. Прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Берман А.Ф.* Краткий курс математического анализа: Учебное пособие. – СПб.: Лань,2010. – 736с.
2. *Зверович Э.И.* Вещественный и комплексный анализ: введение в анализ и дифференциальное исчисление: Учебное пособие для вузов. – Минск: Высшая школа, 2008. – 319 с.
3. *Привалов И.И.* Введение в комплексный анализ: Учебник. - СПб.: Лань, 2009. – 205 с.
4. *Рудин У.* Функциональный анализ: Учебник для вузов. Изд. 2-е, испр., доп. – Лань, 2009. – 540 с.
5. *Треногин В.А.* Функциональный анализ: Учебник. Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 488 с.